

Polinomios

- Definición dun polinomio:
 - A partir dos seus coeficientes: $p(x) = x^5 + 6x^2 + 7x + 3$:
 $p = [1 \ 0 \ 0 \ 6 \ 7 \ 3]$;
 - Ollo: comezar polo monomio de máis alto grao e poñer 0 nos coeficientes dos monomios ausentes
 - A partir das raíces: $p(x)$ = polinomio con raíces 1, 1, 0, -1: $\text{poly}([1 \ 1 \ 0 \ -1])$: da un polinomio con coeficiente 1 para o monomio de máis alto grao
- Valor dun polinomio nun punto x_0 : $\text{polyval}(p, x_0)$. Ex: $\text{polyval}(p, 1)$
- Raíces dun polinomio: $\text{roots}(p)$: retorna un vector coas raíces

Representación gráfica e operaciones con polinomios

- Representación gráfica do polinomio:
 $x = -1:0.1:1; p = [1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 0];$
 $y = \text{polyval}(p, x);$
 $\text{plot}(x, y, 'o-')$
- Suma / resta de polinomios (p, q da mesma orde): $s = p + q;$
 $r = s - q;$ Se $\text{length}(p) \neq \text{length}(q)$: $s = p + [0 \ 0 \ q]$
- Produto de polinomios: $\text{prod} = \text{conv}(p, q)$
- Cociente de polinomios: $[c \ r] = \text{deconv}(p, q)$
- Derivada dun polinomio: $d = \text{polyder}(p);$
- Derivada dun produto de pols: $d = \text{polyder}(p, q)$
- Integral indef. dun polinomio: $ip = \text{polyint}(p);$

Operacións con polinomios

- Derivada dun cociente de pols: $[n \ d]=polyder(p,q)$; n e d son os vectores de coeficientes dos polinomios do numerador e denominador da derivada do cociente
- Descomposición dun cociente de polinomios en suma de fraccións:

$$\frac{n(x)}{d(x)} = \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{(x-p_i)^{m_i}} + di(x)$$

Depende das N raíces (polos) de $d(x)$, p_i con multiplicidade m_i . Termo directo: $di(x)$: polinomio

$$[r \ p \ di] = residue(n, d);$$

$r = r_i$: vector cos residuos, $p = p_i$ (vector cos polos), $di =$ vector cos coeficientes do termo directo (polinomio)

Axuste de funcións a polinomios (I)

- Problema: dado un conxunto de puntos $\{(x_i, y_i), i=1\dots m\}$, atopa-lo polinomio $p(x)$ de grao n que mellor se axusta aos puntos (minimiza a suma dos erros cadráticos entre os puntos (x_i, y_i) e os valores $(x_i, p(x_i))$ do polinomio).

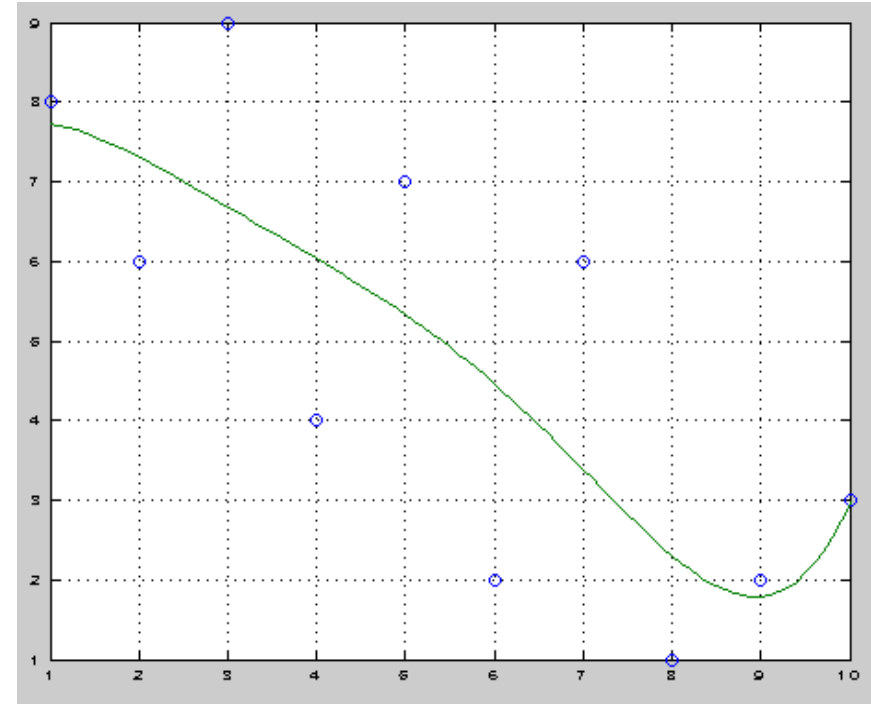
$$E = \sum_{i=1}^m (y_i - p(x_i))^2$$

- Función *polyfit*(x, y, n)
- x, y = vectores con coordenadas X, Y ; n = orde do polinomio buscado
- Retorna o vector de coeficientes do polinomio que minimiza este erro

Axuste de funcións a polinomios (II)

- Exemplo: axuste a un polinomio de orde 5:

```
x=1:10;y=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3];  
p=polyfit(x,y,5);  
x2=1:0.1:10;  
plot(x,y,'o',x2,polyval(p,x2),'-')  
grid
```



- Permite axustar a funcións non polinómicas.

Axuste a función potencial

- **Potencial:** $y = ax^b$: Tomando logaritmos: $\log(y) = \log(a) + b \cdot \log(x)$: $\log(y)$ é un polinomio de orde 1 con variábel $\log(x)$:

$$p = \text{polyfit}(\log(x), \log(y), 1);$$

Como axusto a un polinomio de grado 1, $\text{length}(p)=2$, e entón

$$\left. \begin{array}{l} \log(y) = b \cdot \log(x) + \log(a) \\ \log(y) = p(1) \cdot \log(x) + p(2) \end{array} \right\} b = p(1), p(2) = \log(a) \rightarrow a = e^{p(2)}$$

E a función potencial é: $y = e^{p(2)} x^{p(1)}$

```
x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];y=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3];  
p=polyfit(log(x),log(y),1);  
plot(x,y,'o',x,exp(p(2))*x.^p(1),'-')
```

Axuste a función exponencial

- **Exponencial:** $y = ae^{bx}$ (ou ben $y = a10^{bx}$): tomando logaritmos: $\log(y) = \log(a) + b \cdot x$: $\log(y)$ é un polinomio de orde 1 con variábel x :

$$p = \text{polyfit}(x, \log(y), 1);$$

Como axusto a un polinomio de grado 1, $\text{length}(p)=2$, e entón:

$$\left. \begin{array}{l} \log(y) = b \cdot x + \log(a) \\ \log(y) = p(1) \cdot x + p(2) \end{array} \right\} b = p(1), p(2) = \log(a) \rightarrow a = e^{p(2)}$$

E a función exponencial é: $y = e^{p(2)} e^{p(1)x} \rightarrow y = e^{p(2) + p(1)x}$

```
x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];y=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3];  
p=polyfit(x,log(y),1);  
plot(x,y,'o',x,exp(p(2)+p(1)*x),'-')
```

Axuste a función logarítmica

- **Logarítmica:** $y = a \cdot \log(x) + b$ (ou ben $y = a \cdot \log_{10} x + b$): y é un polinomio de orde 1 en $\log(x)$:

$$p = \text{polyfit}(\log(x), y, 1)$$

Temos que:

$$\left. \begin{array}{l} y = a \cdot \log(x) + b \\ y = p(1) \cdot \log(x) + p(2) \end{array} \right\} a = p(1), b = p(2)$$

E a función logarítmica é: $y = p(1) \cdot \log(x) + p(2)$

```
x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];y=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3];  
p=polyfit(log(x),y,1);  
plot(x,y,'o',x,p(1)*log(x)+p(2),'-')
```

Axuste a función recíproca

- **Recíproca:** $y = \frac{1}{ax+b}$

Invertindo temos: $1/y = ax+b$, e $1/y$ é un polinomio de orde 1 en x :

$$p = \text{polyfit}(x, 1./y, 1)$$

Temos que:

$$\left. \begin{array}{l} 1/y = a \cdot x + b \\ 1/y = p(1) \cdot x + p(2) \end{array} \right\} a = p(1), b = p(2)$$

E a función recíproca é: $y = \frac{1}{p(1) \cdot x + p(2)}$

```
x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];y=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3];  
p=polyfit(x,1./y,1);  
plot(x,y,'o',x,1./(p(1)*x+p(2)),'-')
```

Interpolación de funciones

- Problema: temos m puntos $\{(x_j, y_j), j=1 \dots m\}$ dunha función $f(x)$ descoñecida, e queremos coñecer $f(x_i)$ con $x_i \neq x_j, j=1 \dots m$. Usamos a función *interp1* de Matlab:

$$y2 = \text{interp1}(x, y, x2, \text{'método'})$$

- x e y = vector cos puntos x_j e y_j
- $x2$: puntos nos que queremos calcular $f(x2)$
- $y2$: valores interpolados (estimados) para $f(x2)$
- método: *nearest* (retorna y para o punto x máis cercano a x_i), *linear* (usando interpolación *spline* lineal), *spline* (usando interp. *spline* cúbica) e *pchip* (usando interp. cúbica de Hermite)

Exemplo de interpolación

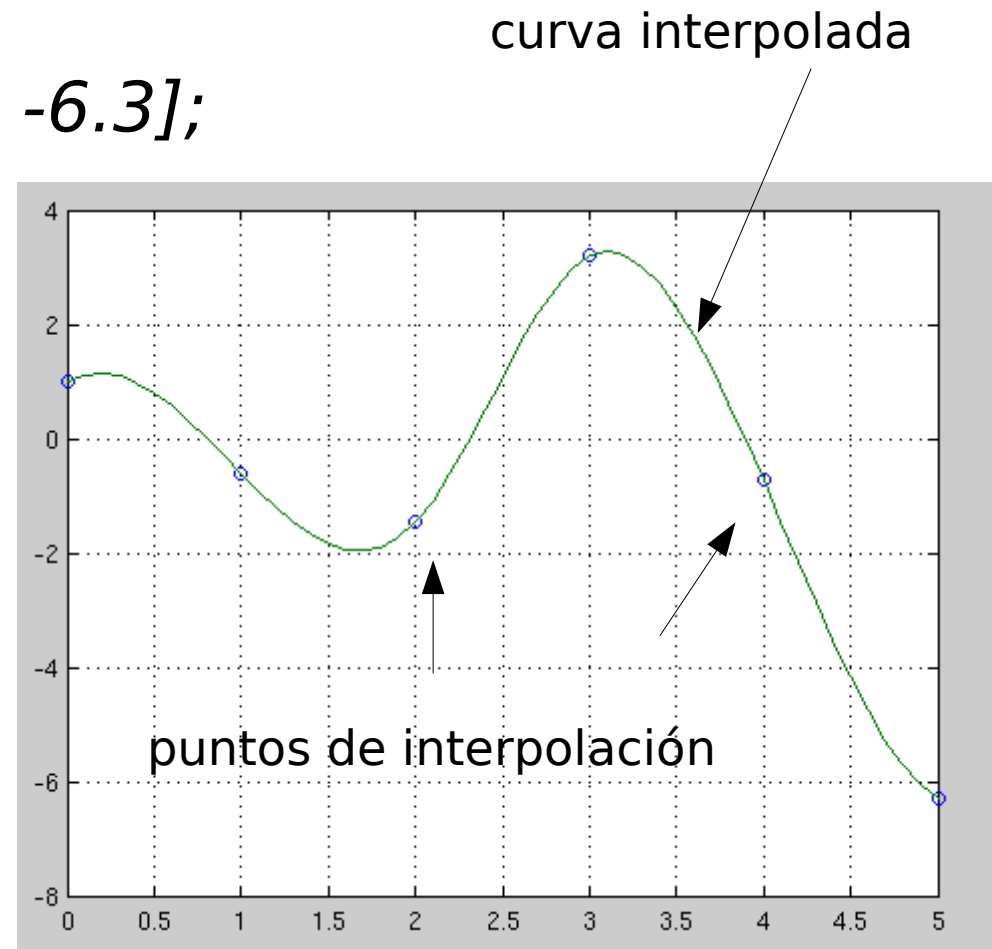
```
x = 0:1:5;
```

```
y = [1 -0.62 -1.47 3.2 -0.73 -6.3];
```

```
x2=0:0.1:5;
```

```
y2=interp1(x,y,x2,'spline');
```

```
plot(x,y,'o',x2,y2,'-')
```



Función *spline* para interpolación con splines cúbicas

- Funciones polinómicas a cachos

$$y2 = \text{spline}(x, y, x2)$$

x = coordenadas X dos puntos

y = coordenadas Y dos puntos

$x2$ = puntos nos que se calcula o polinomio

$y2$ = valor da *spline* en $x2$

- Exemplo:

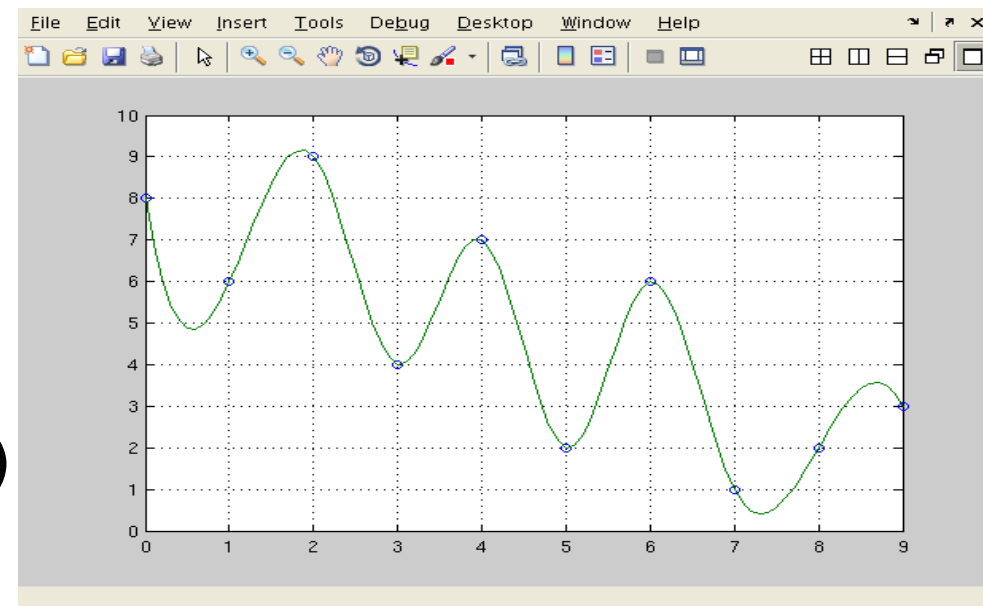
```
x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9];
```

```
y=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3];
```

```
x2 = 0:0.1:9;
```

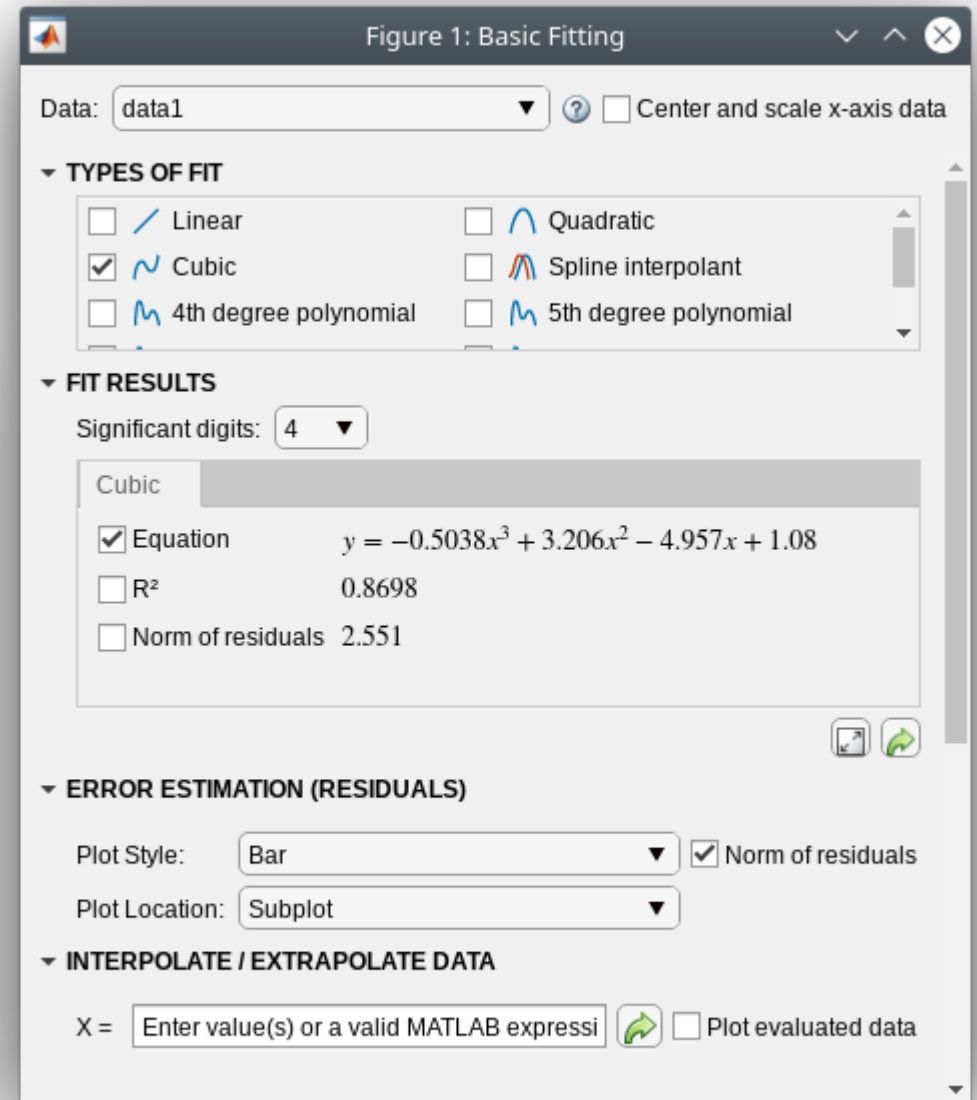
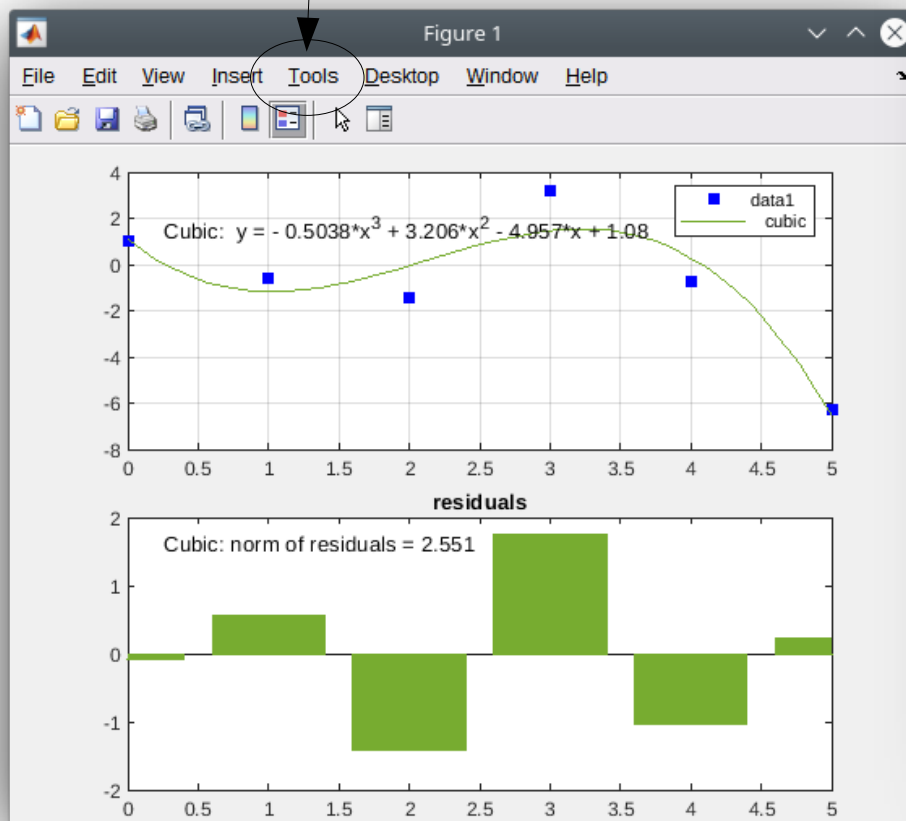
```
plot(x,y,'o',x2,spline(x,y,x2))
```

```
grid
```



Asistente para interpolación

- Menú *Tools* -> *Basic Fitting* en ventá de figura



Exercicios

x	y
0	1
1	-0,6242
2	-1,4707
3	3,2406
4	-0,7366
5	-6,3717

- Dado o polinomio $p(x) = x^5 - 12x^4 + 40x^3 - 17x^2 - 72x + 36$, calcula as súas raíces, o seu valor no punto $x = 1$ e $p'(x)$
- Considera o polinomio $q(x) = (x-1)^2(x-2)(x-10)$. Calcula $p+q$ (p é o do exercicio anterior), $p \cdot q$ e a súa derivada, o cociente p/q e a súa derivada. Calcula os residuos, polos e termo directo de p/q
- Os puntos seguintes corresponden á función $f(x) = 1.5^x \cos 2x$. Interpólaos usando os métodos *linear*, *spline*, *pchip* e representa gráficamente os puntos, a función f e as funcións interpoladas

Soluciones aos exercicios

1) $p = [1 \ -12 \ 40 \ -17 \ -72 \ 36]$; `roots(p)`; `polyval(p, 1)`; `polyder(p)`

2) $q = \text{poly}([1 \ 1 \ 2 \ 10])$; $p + [0 \ q]$; `conv(p, q)`; `polyder(p, q)`; `deconv(p, q)`; `polyder(deconv(p, q))`; $[r \ po \ d] = \text{residue}(p, q)$
-> $r = [27.1852 \ 2.0000 \ -6.1852 \ -2.6667]$, $po = [10.0000 \ 2.0000 \ 1.0000 \ 1.0000]$, $d = [1 \ 2]$ (polinomio de orde 1)

3) $x = 0:5$; $y = [1 \ -0,6242 \ -1,4707 \ 3,2406 \ -0,7366 \ -6,3717]$; `plot(x, y)`
 $xi = 0:0.1:5$; $yi = \text{interp1}(x, y, xi, 'linear')$; `plot(x, y, 'bo-', xi, yi, 'g-')`

