Polinomios

- Definición dun polinomio:
  - A partir dos seus coeficientes: $p(x) = x^5+6x^2+7x+3$: *p = [1 0 0 6 7 3];*
    - Ollo: comezar polo monomio de máis alto grao e poñer 0 nos coeficientes dos monomios ausentes
  - A partir das raíces: *p(x)*=polinomio con raíces 1, 1, 0, -1: *poly([1 1 0 -1])*: da un polinomio con coeficiente 1 para o monomio de máis algo grao
- Valor dun polinomio nun punto x_0: *polyval(p, x0)*. Ex: *polyval(p, 1)*
- Raíces dun polinomio: *roots(p)*: retorna un vector coas raíces

Representación gráfica e operacións con polinomios

- Representación gráfica do polinomio:
  x = -1:0.1:1;p=[1 2 3 1 0];
  y=polyval(p,x);
  plot(x,y,'o-')
- Suma / resta de polinomios (p, q da mesma orde): *s = p+q; r=s-q;* Se *length(p)≠length(q): s = p + [0 0 q]*
- Produto de polinomios: *prod=conv(p, q)*
- Cociente de polinomios: *[c r]=deconv(p, q)*
- Derivada dun polinomio: *d = polyder(p);*
- Derivada dun produto de pols: *d=polyder(p, q)*
- Integral indef. dun polinomio: *ip = polyint(p);*

Operacións con polinomios

- Derivada dun cociente de pols: *[n d]=polyder(p,q); n* e *d* son os vectores de coeficientes dos polinomios do numerador e denominador da derivada do cociente
- Descomposición dun cociente de polinomios en suma de fraccións:

$$\frac{n(x)}{d(x)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{r_i}{(x-p_i)^{m_i}}+di(x)$$

Depende das N raíces (polos) de $d(x)$, p_i con multiplicidade m_i. Termo directo: $di(x)$: polinomio

[r p di] = residue(n, d);

$r = r_i$: vector cos residuos, $p = p_i$ (vector cos polos), di = vector cos coeficientes do termo directo (polinomio)

Axuste de funcións a polinomios (I)

- Problema: dado un conxunto de puntos $\{(x_i, y_i), i=1...m\}$, atopa-lo polinomio $p(x)$ de grao n que mellor se axusta aos puntos (minimiza a suma dos erros cadráticos entre os puntos (x_i,y_i) e os valores $(x_i,p(x_i))$ do polinomio).

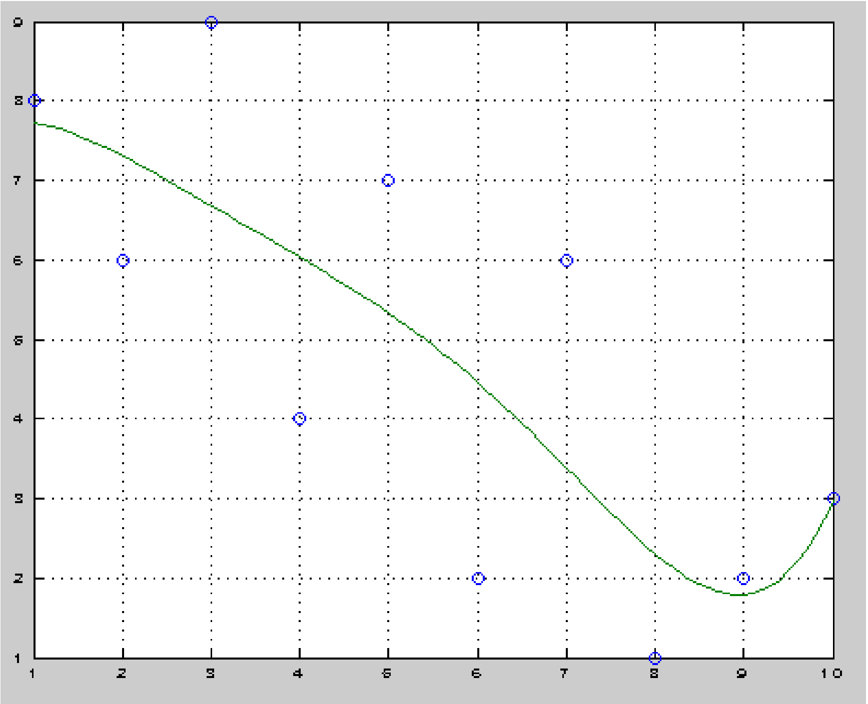
$$E=\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-p\left(x_i\right)\right)^2$$

- Función *polyfit(x, y, n)*
- *x, y* = vectores con coordenadas X, Y; *n* = orde do polinomio buscado
- Retorna o vector de coeficientes do polinomio que minimiza este erro

Axuste de funcións a polinomios (II)

- Exemplo: axuste a un polinomio de orde 5:

```
x=1:10;y=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3];
p=polyfit(x,y,5);
x2=1:0.1:10;
plot(x,y,'o',x2,polyval(p,x2),'-')
grid
```



- Permite axustar a funcións non polinómicas.

Axuste a función potencial

- **Potencial**: $y = ax^b$: Tomando logaritmos: *log(y)= log(a) + b·log(x)*: *log(y)* é un polinomio de orde 1 con variábel *log(x)*:

$$p = polyfit(log(x),log(y),1);$$

Como axusto a un polinomio de grado 1, *length*(*p*)=2, e entón

$$\left.\begin{aligned} log(y) &= b \cdot log(x) + log(a) \\ log(y) &= p(1)*log(x)+p(2) \end{aligned}\right\} b=p(1),\ p(2)=log(a) \rightarrow a=e^{p(2)}$$

E a función potencial é: $\boxed{y=e^{p(2)}x^{p(1)}}$

```
x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];y=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3];
p=polyfit(log(x),log(y),1);
plot(x,y,'o',x,exp(p(2))*x.^p(1),'-')
```

Axuste a función exponencial

- **Exponencial**: $y = ae^{bx}$ (ou ben $y = a10^{bx}$): tomando logaritmos: $log(y)= log(a) + b \cdot x$: $log(y)$ é un polinomio de orde 1 con variábel x:

$$p = polyfit(x,log(y),1);$$

Como axusto a un polinomio de grado 1, $length(p)$=2, e entón:

$$\left.\begin{array}{l} log(y)=b \cdot x+log(a) \\ log(y)=\mathrm{p}(1)*x+p(2) \end{array}\right\} \quad b=p(1),\ p(2)=log(a) \rightarrow a=e^{p(2)}$$

E a función exponencial é: $y=e^{p(2)}e^{p(1)\mathrm{x}} \rightarrow \boxed{y=e^{p(2)+p(1)\mathrm{x}}}$

```
x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];y=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3];
p=polyfit(x,log(y),1);
plot(x,y,'o',x,exp(p(2)+p(1)*x),'-')
```

Axuste a función logarítmica

- **Logarítmica**: $y = a \cdot log(x) + b$ (ou ben $y = a \cdot log_{10} x + b$): y é un polinomio de orde 1 en $log(x)$:

$$p = polyfit(log(x),y,1)$$

Temos que:

$$\left.\begin{array}{l} y = a \cdot log(x) + b \\ y = p(1) \cdot log(x) + p(2) \end{array}\right\} a = p(1), b = p(2)$$

E a función logarítmica é: $\boxed{y = p(1) \cdot log(x) + p(2)}$

```
x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];y=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3];
p=polyfit(log(x),y,1);
plot(x,y,'o',x,p(1)*log(x)+p(2),'-')
```

Axuste a función recíproca

- **Recíproca**: $y=\frac{1}{ax+b}$

  Invertindo temos: *1/y=ax+b*, e *1/y* é un polinomio de orde 1 en *x*:

$$p = polyfit(x,1./y,1)$$

Temos que:

$$\left.\begin{array}{l} 1/y=a\cdot x+b \\ 1/y=p(1)\cdot x+p(2) \end{array}\right\} a=p(1), b=p(2)$$

E a función recíproca é: $y=\frac{1}{p(1)\cdot x+p(2)}$

```
x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];y=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3];
p=polyfit(x,1./y,1);
plot(x,y,'o',x,1./(p(1)*x+p(2)),'-')
```

Interpolación de funcións

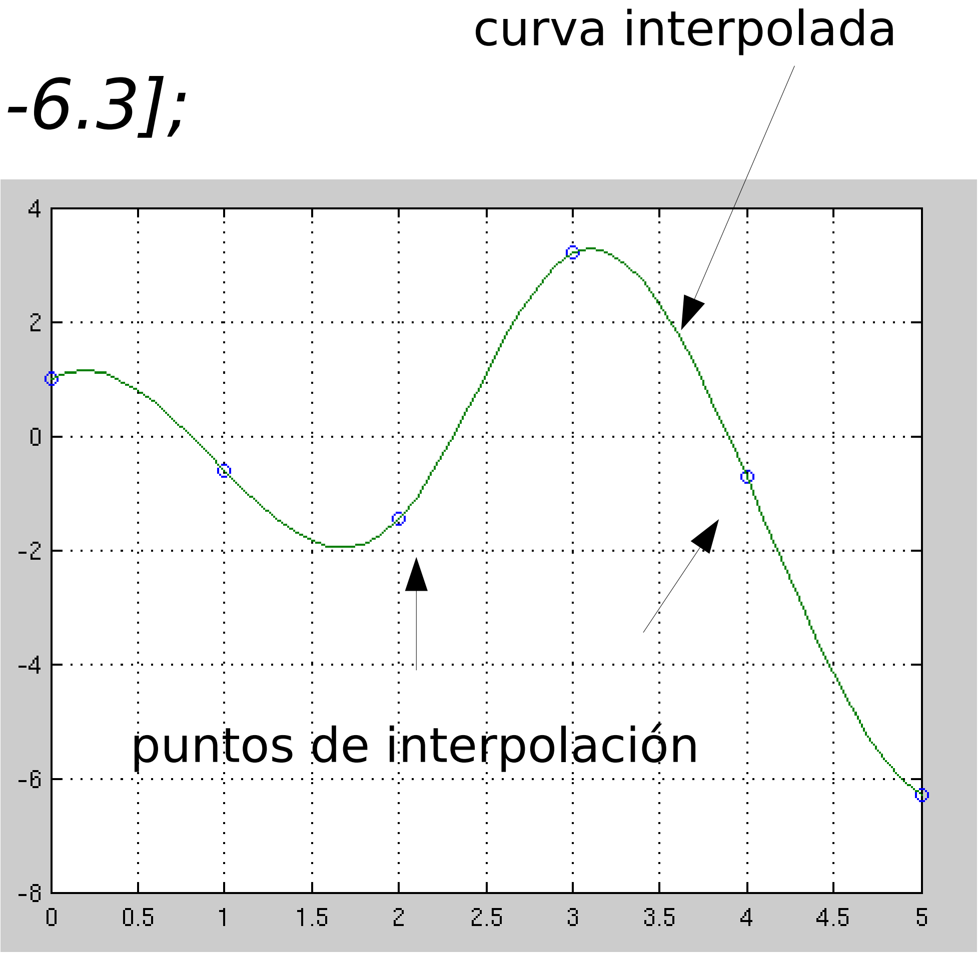
- Problema: temos *m* puntos $\{(x_j,y_j), j=1...m)\}$ dunha función *f(x)* descoñecida, e queremos coñecer $f(x_i)$ con $x_i \neq x_j$, $j=1...m$. Usamos a función *interp1* de Matlab:

y2 = interp1(x, y, x2, 'método')

- *x* e *y* = vector cos puntos x_j e y_j
- *x2*: puntos nos que queremos calcular *f(x2)*
- *y2*: valores interpolados (estimados) para *f(x2)*
- método: *nearest* (retorna *y* para o punto *x* máis cercano a *xi*), *linear* (usando interpolación *spline* lineal), *spline* (usando interp. *spline* cúbica) e *pchip* (usando interp. cúbica de Hermite)

Exemplo de interpolación

```
x = 0:1:5;
y = [1 -0.62 -1.47 3.2 -0.73 -6.3];
x2=0:0.1:5;
y2=interp1(x,y,x2,'spline');
plot(x,y,'o',x2,y2,'-')
```

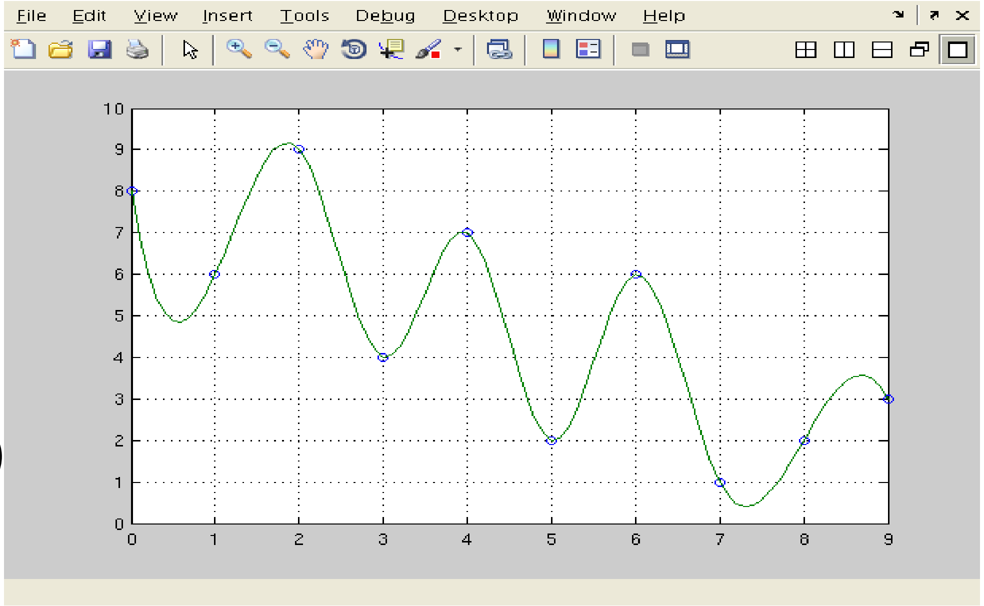


Función *spline* para interpolación con splines cúbicas

- Funcións polinómicas a cachos

$$y2=spline(x,y,x2)$$

x = coordenadas X dos puntos
y = coordenadas Y dos puntos
x2 = puntos nos que se calcula o polinomio
y2 = valor da *spline* en *x2*

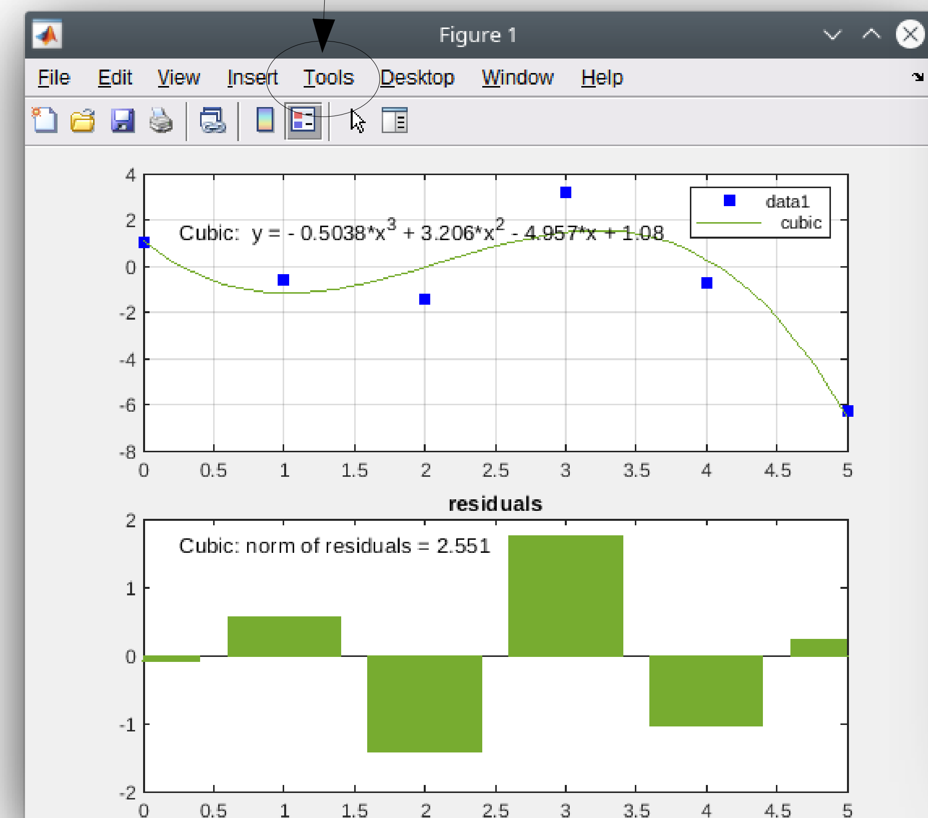


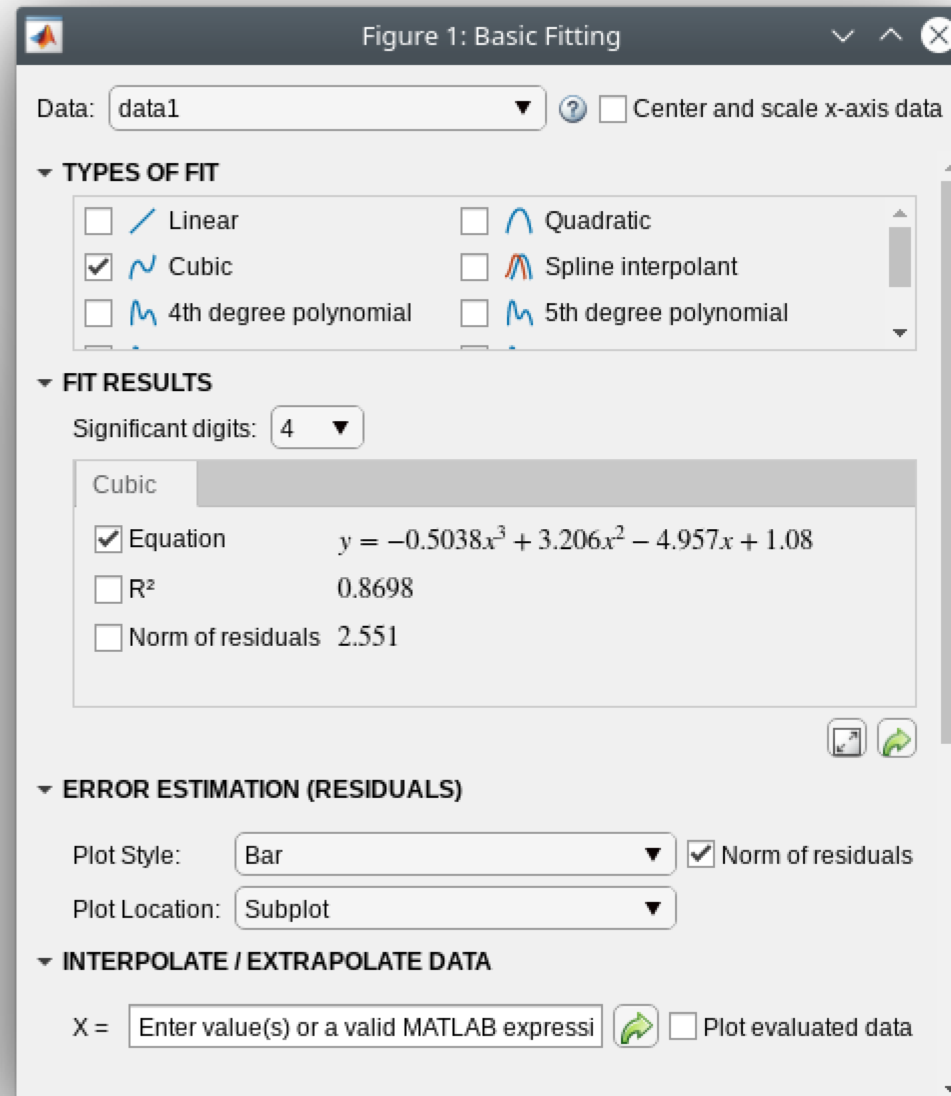
- Exemplo:

x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9];
y=[8 6 9 4 7 2 6 1 2 3];
x2 = 0:0.1:9;
plot(x,y,'o',t,spline(x,y,x2))
grid

Asistente para interpolación

- Menú *Tools -> Basic Fitting* en ventá de figura





Exercicios

x	y
0	1
1	-0,6242
2	-1,4707
3	3,2406
4	-0,7366
5	-6,3717

- Dado o polinomio $p(x) = x^5 -12x^4 + 40x^3-17x^2-72x+36$, calcula as súas raices, o seu valor no punto x = 1 e $p'(x)$
- Considera o polinomio $q(x) = (x-1)^2(x-2)(x-10)$. Calcula $p+q$ (p é o do exercicio anterior), $p·q$ e a súa derivada, o cociente p/q e a súa derivada. Calcula os residuos, polos e termo directo de p/q
- Os puntos seguintes corresponden á función $f(x)=1.5^x cos2x$. Interpólaos usando os métodos *linear*, *spline*, *pchip* e representa gráficamente os puntos, a función f e as funcións interpoladas

Solucións aos exercicios

1) *p = [1 -12 40 -17 -72 36];roots(p); polyval(p, 1); polyder(p)*

2) *q = poly([1 1 2 10]); p+[0 q]; conv(p, q); polyder(p, q); deconv(p, q);polyder(deconv(p, q)); [r po d] = residue(p, q) -> r =[27.1852 2.0000 -6.1852 -2.6667], po =[10.0000 2.0000 1.0000 1.0000], d =[1 2] (polinomio de orde 1)*

3) *x = 0:5; y = [1 -0,6242 -1,4707 3,2406 -0,7366 -6,3717]; plot(x, y)*
   xi=0:0.1:5; yi=interp1(x, y, xi, 'linear'); plot(x, y, 'bo-', xi, yi, 'g-')