Cálculo numérico e simbólico

- Resolución **numérica** de ecuación non linear dunha variábel: *f(x)=0*:

  Función anónima

  f=@(x) expresión; x = fzero(f, x0)

  - *x0* é un punto de inicio
  - Ex: $xe^{-x}=0.2$: *f=@(x) x*exp(-x)-0.2; fzero(f, 0.7)*

- Mínimo dunha función:

  f=@(x) expr
  xmin=fminbnd(f,a,b);
  [xmin vmin] = fminbnd(f, a,b)

  - Busca o valor mínimo de *f* no intervalo *[a,b]*
  - Retorna punto e valor mínimo *xmin* e *vmin*
  - Exemplo: *f=@(x) x^3-12*x^2+3*x-1;*
    [x v]=fminbnd(f,0,10)

Integración numérica

x = quad('función', a, b)

- A función pode ser unha expresión, función predefinida de Matlab ou función definida polo usuario. Ídem en *fzero()* e *fminbnd()*
- A función debe escribirse considerando que *x* é un vector (operandos compoñente a compoñente)
- Ex: *quad('x.*exp(-0.8*x) + 0.2', 0, 8)*

$$\int_0^8 \left(xe^{-0.8x} + 0.2 \right) dx$$

- Para integral de función definida polos puntos $\{(x_i, y_i), i=1 \ldots n\}$ mediante o método dos trapecios: *trapz(x, y)*

```
x=0:0.01:8;
y=x.*exp(-0.8*x)+0.2;
trapz(x, y)
```

- Simbólicamente: *syms x; eval(int(x*exp(-0.8*x)+0.2,x,0,8))*

Cálculo simbólico (I)

- Definición de variábeis simbólicas: *syms v1 ... vn*
- En **Octave**: antes de definilas, executa *pkg load symbolic*.
- Límites: *limit(expresión, variábel, valor, lado)*
  - *var*, *valor* e *lado* son opcionais (*var=x,valor=0* por defecto; *lado* = '*left*' ou '*right*', por defecto calcúlase o límite por ambos lados)
  - Ex: *syms x; limit(1/x); limit(1/x,inf); limit(1/x, x, 0, 'left');*
- Derivación: *diff(expresión, var, orde)*
  - *var* e *orde* son opcionais (*var=x* e *orde=1*)
  - Ex: *syms x; diff(x^2); diff(x^2, x); diff(x^2,x,2)*
    syms x y; diff(x^2+y^2,x,y)

Cálculo simbólico (II)

- Integración indefinida: *int(expresión, var)*
- Integración definida: *int(expresión, var, ini, fin)*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

  - Ex: *int(cos(x), x); int(exp(-x^2), 0,inf); eval(ans)*
- Series numéricas: *symsum(expresión, var, ini, fin)*
  - Ex: *syms n; symsum(1/(n^2-1),n,2,inf)*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

- Substitución de variábeis simbólicas por valores numéricos:

res = subs(expresión, var, valor(es))

  - Ex: *subs(x^2+exp(-x), x, pi/2)*
- *Avaliación de expresión simbólica en punto flotante: eval(expr)* ou double(expr). En octave: *double(expr)*.

Conversión entre cadeas de caracteres, expresións simbólicas e referencias a función

- Conversión de cadea de caracteres (cunha expresión matemática) a expresión simbólica:

  syms x;f=str2sym('x^2')

  Non podes chamala (p.ex. f(5)), pero si podes derivala: *diff(f,x)*, e calcular o seu valor con *subs(f,x,5)*

  Non funciona *diff('x^2')*: *diff(str2sym('x^2'))*

- Podes facer operacións de cálculo simbólico:

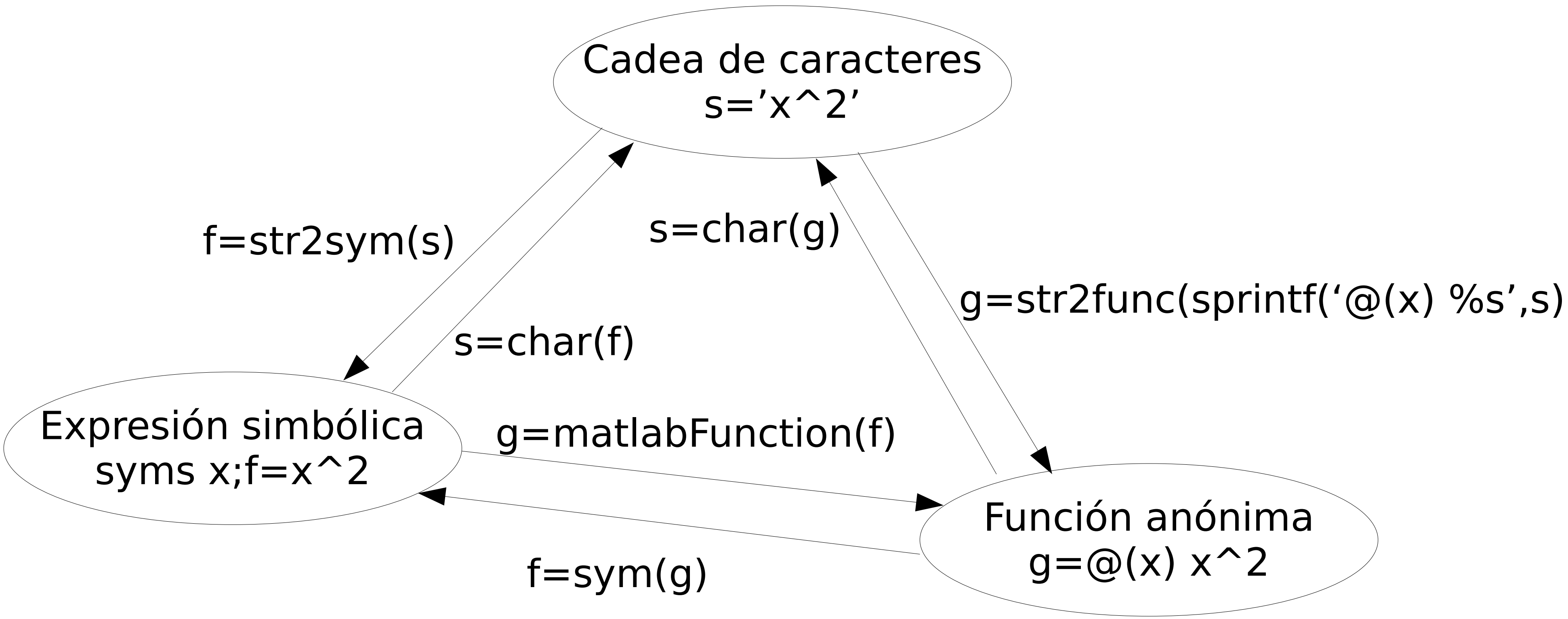
  con funcións *inline*: *f=inline('x^2'); diff(f(x))*

  con funcións anónimas: *f=str2func('@(x) x^2'); diff(f(x))*

- Conversión de expresión simbólica a función anónima:

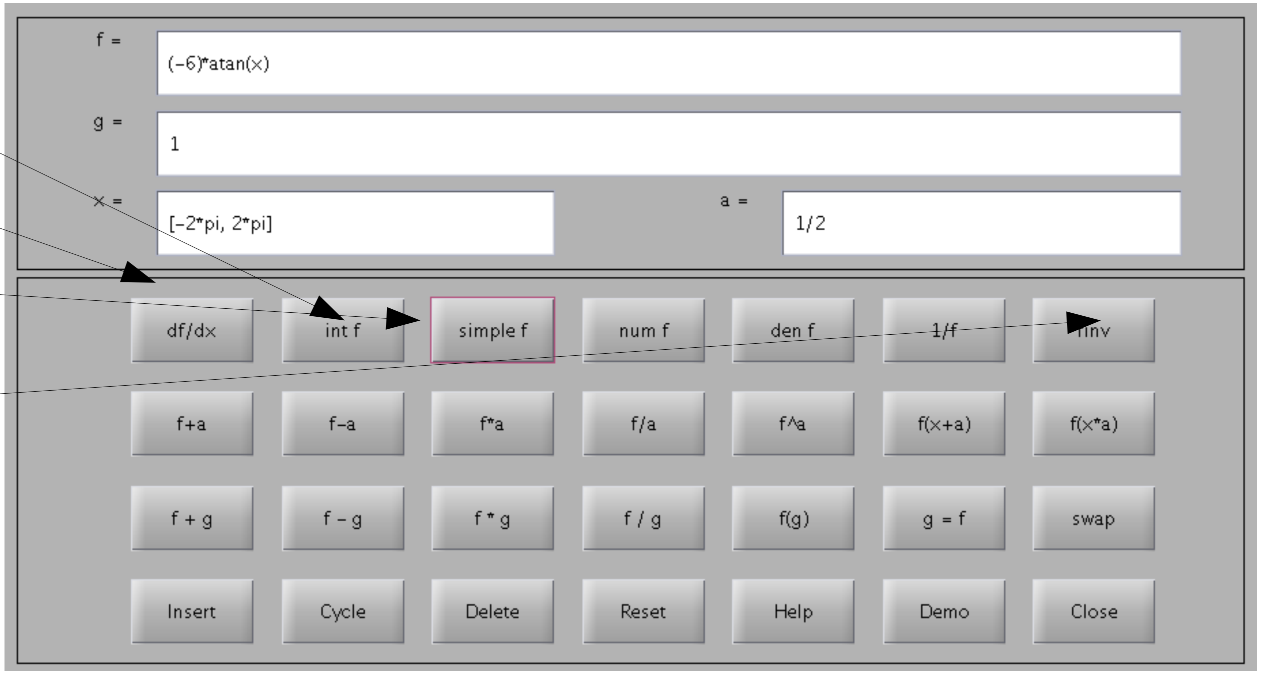
  syms x;f=x^2;g=matlabFunction(f)

Esquema de conversión: cadea de caracteres ↔ función anónima ↔ expresión simbólica



Cálculo simbólico (III)

- *funtool*: calculadora de funcións
  - Integrar
  - Derivar
  - Simplificar
  - Invertir
  - *help funtool*

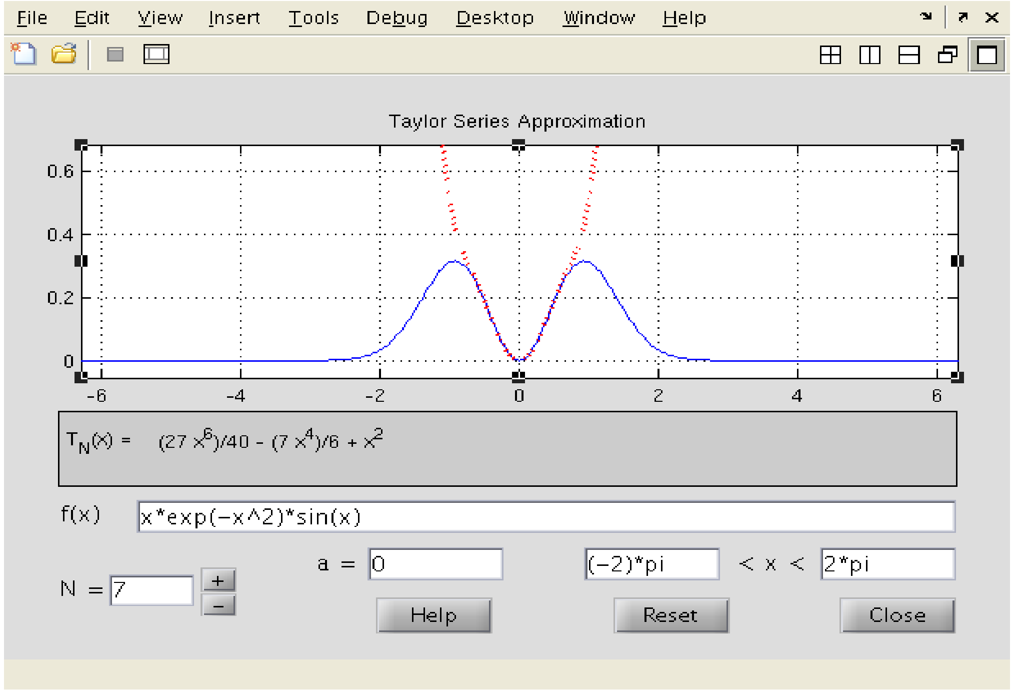


Cálculo simbólico (IV)

Polinomio de Taylor orde *n-1* dunha función *f* en *x=a*:

taylor(f,x,'ExpansionPoint',a,'Order',n)

taylor(f): en x=0,orde 5
taylor(f,x):en x=0,orde 5
taylor(f,x,'ExpansionPoint',1);
en x=1, orde 5
taylor(f,x,'Order',7);
en x=0, orde 6
Ex: syms x; f=(x-1)/(x+1);
taylor(f,x,'ExpansionPoint',7, 'Order',1)



taylortool: calcula e representa graficamente a función e o seu polinomio de Taylor

Cálculo simbólico (V)

- Resolución **simbólica** de ecuacións e sistemas de ecuacións:

  syms x; h = solve(expresión, var)

  - A ecuación é da forma *expresión=0*
  - Ex: *syms x; h = solve(x*exp(2*x)-5)*
- *Resolución simbólica dun sistema de varias ecuacións con varias variábeis:*

  syms x1…xn; [v1 … vn]=solve(eq1,…,eqn, x1, …, xn)

  - Ex: *syms x,y,z; [xz yz]= solve(10*x+12*y+16*z, 5*x-y-13*z,x,y)* %x,y función de z
  - Ex: *syms x, y; [x y] = solve(x*exp(y)-3,y*exp(x)-2,x,y*)

Combinatoria

- Función *nchoosek(n, k)*: calcula $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$
- **Combinacións** de *n* elementos dun vector *v* tomados en grupos de *k* (*n* < 15): *nchoosek(v, k), nchoosek('abcde',3)*, *nchoosek({'a','b','c','d','e'},5)*
- Retorna unha matriz de *n*!/((*n* – *k*)! *k*!) filas e *k* columnas; *n* < 15 (evitar explosión combinatoria)
- **Permutacións** de *n* elementos: *perms(1:n)*, *perms('abcd')*, *perms({'a' 'b' 'c'})*. Retorna unha matriz de *n*! filas e *n* columnas; *n* debe ser < 15
- Selección aleatoria dunha permutación de *n* números de 1 a *n*: *randperm(n)*. Ex: *i=randperm(n);v(randperm(n))*: barallamento aleatorio dos elementos do vector *v* con *n* elementos.

Exercicios

1) Representa gráficamente $f(x)=e^{-x^2/10}\sin(x^2)$ e atopa o punto $(x_0,f(x_0))$ que minimiza f en $[-10, 10]$

2) Resolve as ecuacións $4\cos 2x - e^{x/2}+5=0$; $2\,sen\,x-\sqrt{x}=-2.5$; $\cos x = 2x^3$

3) Calcula θ tal que $92=88/(\cos\theta + 0.45\,sen\,\theta)$

4) Calcula numéricamente a integral $\int_0^5 \frac{1}{0.6x^2+0.5x+2}\,dx$

5) Calcula simbólicamente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{x^2+x+2}}{x-1}\right] \qquad \int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{1}{2}sen^2 x\right)dx \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n^2+\log n+5^n}$$

Solucións aos exercicios (I)

1) *Represento e atopo o mínimo en [-10, 10]*
   *fplot('exp(-x^2/10)*sin(x^2)', [-10,10])*
   *[xmin fmin] = fminbnd('exp(-x^2/10)*sin(x^2)', -10, 10)*
   x =2.1477, fmin =-0.6274

2) *a) fzero('4*cos(2*x)-exp(x/2)+5', 0) -> 1.2374*
   *comprobación: subs('4*cos(2*x)-exp(x/2)+5', 1.2374) -> 2.4960e-04*
   *syms x; solve(4*cos(2*x)-exp(x/2)+5, x) -> -1.557-0.258*i*
   *comprobación: subs('4*cos(2*x)-exp(x/2)+5', ans) -> -0.14e-30 – 0.272e-30*i*
   *b) Solución numérica: fzero('2*sin(x)-sqrt(x)+2.5', 2) -> 3.4664*
   *comprobación: subs('2*sin(x)-sqrt(x)+2.5', 3.4664) -> -4.4409e-16*
   *c) Solución simbólica: fzero('cos(x)-2*x^3', 0) -> 0.7214*
   *comprobación: subs('cos(x)-2*x^3', 0.7214) -> 2.2821e-05*

Solucións aos exercicios (II)

3) *fzero('92-88/(cos(x)+ 0.45*sin(x))', 0) -> -0.0881*

4) *quad('1./(0.6*x.^2+0.5*x+2)', 0, 5) -> 0.9596*
*x=0:0.01:5; y=1./(0.6*x.^2+0.5*x+2); trapz(x, y) -> 0.9596*
*syms x; eval(int(1/(0.6*x^2+0.5*x+2), x, 0, 5)) -> 0.9596*

5) *syms x; limit(x/(x-1)-1/log(x), x, 1) -> ½*
syms x; diff(sqrt(x^2 + x + 2)/(x-1), x, 1)
*syms x: int(1 + sin(x)^2/2, x, 0, pi/2) -> 5/8*pi*
syms n; symsum((2^n + 3^n)/(n^2+log(x)+5^n), n, 1, inf)
-> sum((2^n+3^n)/(n^2+log(x)+5^n),n = 1 .. Inf) (non a resolve, pero converxe)

Versión vectorizada:

```
n=1:100;
sum((2.^n + 3.^n)./(n.^2 + log(n)+5.^n))
```

Resultado: 1.8918

```
clear all
suma = 0;sumando = inf; n = 1
while sumando > 1e-5
        sumando = (2^n + 3^n)/(n^2 + log(n) + 5^n);
        suma = suma + sumando; n = n + 1;
end
fprintf('n= %i suma= %g\n', n, suma);
```