Boletín de MAPLE

Semana 1

Traballo a desenvolver pol@ alumn@

1. **Cálculo con números**

   a) Determina se son primos os seguintes números: 7, 41, 143, 239. Calcular o seguinte enteiro máis próximo que sexa primo.

   b) Calcula os factores primos dos seguintes números enteiros: 160, 2000, 4562, 54879.

   c) Dados os seguintes números racionais, calcula a división enteira, o resto, o número racional simplificado e o resultado en punto flotante con 4 díxitos decimais:
   $\frac{20}{8}, \frac{748}{36}, \frac{1245}{40}, \frac{84}{738}, \frac{48}{72}, \frac{546}{67}, \frac{5436}{840}, \frac{345}{125}$.

   d) Asigna o valor 20 a variabel x e o valor -3.4 a variabel y.

   e) Visualiza as constantes que tes almacenadas no entorno de traballo de MAPLE.

   f) Avalía as seguintes operacións utilizando aritmética en punto flotante con 20 díxitos decimais:
   $\sqrt{3\pi/2}$, $\exp(7\pi/3)$, $8\pi^{50}$, $\sqrt{40\pi^5 + 6\pi^{457}e^{7\pi^{565}}}$.

2. **Vectores e matrices**

   a) Define os seguintes vectores:

      1) Un vector columna de 5 elementos inicializado a 0.
      2) Un vector fila de 4 elementos inicializado a 4.
      3) Un vector columna inicializado cos elementos: $5x$, $\sqrt{yx^2}$, 0, 3.
      4) Un vector fila de 6 elementos inicializado cos valores x^n, $n = 1 \ldots 6$.
      5) O vector $\mathbf{x} = (1, 4, 2, 0, 3, 3)$.

   b) Define as seguintes matrices:

      1) Unha matriz cadrada **M1**de 2×2 inicializada con 0.
      2) Unha matriz **M2** de 2 filas e 3 columnas inicializada co número 3.
      3) Unha matriz **M3** identidade de tamaño 4.
      4) Unha matriz **M4** de 2 filas e 3 columnas inicializada co vector do apartado 4 do exercicio anterior.
      5) Unha matriz **M5** de 2 filas e 6 columnas inicializada cos vectores dos apartados 4 e 5 do exercicio anterior.
      6) Unha matriz **M6** de 3×3 inicializada co vector do apartado 4 do exercicio anterior. Os elementos restantes inicialízanse a 0.
      7) Unha matriz **M7** de 3×3 inicializada co vector do apartado 4 do exercicio anterior. Os elementos restantes inicialízanse a 6.
      8) Unha matriz **M8** que sexa **M2+M4**
      9) Unha matriz **M8** que sexa $\mathbf{M2} \cdot \mathbf{M4}^T$.
      10) Unha matriz **M9** de tamaño 5×5 onde os elementos da matriz se calculen mediante a función $f(i, j) = \exp(3i - j)$, onde i representa filas e j representa columnas.

   c) Dadas as matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   calcula as matrices: A+B, A+C, AB, BA, BC, AC+BA, 3A, 5B, 8C, 3A-5B, A^2, B^3.

d) Calcula o determinante e a inversa das seguintes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e) Dadas a seguintes matrices:

$$\mathbf{MI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

calcular:

1) A matriz inversa de $MI - A$
2) $(MI - A)^4$
3) A matriz inversa de $MI + A$
4) $\dfrac{MI + A}{MI - A}$

f) Calcula o determinante e matriz inversa das seguintes matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

g) Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

h) Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 4 \\ x - 2y + z &= -2 \\ 8x + 5y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

i) Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z - t &= 1 \\ x - 3y - 2z + t &= 6 \\ 3x + 2y - 3z + 2t &= 9 \\ x - y - z + 2t &= 10 \end{aligned}$$

Semana 3

Traballo a desenvolver pol@ alumn@

1. **Funcións e límites**

   a) Define a seguinte función por intervalos e represéntaa gráficamente:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \\ 3x - x^2 & x > 2 \end{cases}$$

   b) Define a seguinte función definida por intervalos e representala gráficamente:

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 1-x & \dfrac{1}{2} \leq x < 1 \\ x-1 & resto \end{cases}$$

   c) Dadas as funcións $f(x,y) = x^2 + y^2$, $h(x,y) = ye^x$ e $k(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$, realiza as seguintes operacións con funcións: $f - h$, $f + h$, $f \times h$, f/h e $f \circ (h,k)$, onde $\circ$ designa ao operación de composición, e (h,k) indica o par ordeado resultante de aplica-las funcións $h(x,y)$ e $k(x,y)$, e calcula o valor das mesmas no punto $(1,1)$.

   d) Representa gráficamente as funcións e calcula os limites seguintes:

      1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
      2) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^{1/x}$
      3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$
      4) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{\pi}{x}\right)^x$
      5) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$
      6) $\lim\limits_{x\to \infty} (2^x + 3^x)^{1/x}$
      7) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$
      8) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$
      9) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + \operatorname{sen} x}{2x^2 + \cos(4x)}$
      10) $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{senh}(\tanh x) - \tanh(\operatorname{senh} x)$
      11) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$
      12) $\lim\limits_{x\to 0} e^{|x|/x}$
      13) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x - senx}{cos2x}$
      14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \arctan(x/2)}{cosx(sen2x)^2}$
      15) $\lim\limits_{x\to \infty} xlog\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
      16) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{logx}{x - \sqrt{x}}$
      17) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{ArgSh(x-1)}$
      18) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{1/3} - 1}{x - 1}$

19) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

2. **Derivadas**

   a) Calcula tódalas derivadas parciais de orden 2 da función $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^4+y^4)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   b) Calcular a seguinte derivada $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\operatorname{sen}(xy) + \cos y)$

   c) Calcula e representa na mesma gráfica as seguintes funcións e as súas derivadas de orden 1 e 2:

   1) x^2
   2) $8x^3$
   3) $x^2 - 2x + 1$
   4) $x^3 - x^2 - 8x + 1$
   5) $\dfrac{1}{x^5 + x + 1}$
   6) $x^3 - 12x^2 + 45x + 30$
   7) $\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$
   8) $\dfrac{x^2}{2-x}$
   9) $\sqrt{\dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}}$
   10) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

   d) Calcula as cinco primeiras derivadas das funcións:

   1) $f(x) = 8x^7 - 3x^6 + 5x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + 1$
   2) $g(x) = \operatorname{sen} x$
   3) $h(x) = \ln x$

3. **Integrais**

   a) Calcula e representa na mesma gráfica as seguintes funcións coas súas integrais indefinidas:

   1) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$
   2) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   3) $\arctan x$
   4) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
   5) $x\cos(3x)$
   6) $\sqrt{1-x^2}$
   7) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x}$
   8) $\dfrac{2^x}{1+4^x}$
   9) $\dfrac{x-5}{(x-1)(x+1)^2}$
   10) $4e^{x-1}$
   11) $x^2 e^{2x}$
   12) $x^2 \operatorname{sen} 2x$
   13) $x^3(\ln x)^2$

14) $(2-x)\cos 2x$

15) $\dfrac{1}{9-4x^2}$

16) $\operatorname{sen}^3 x$

17) $\dfrac{x^2}{x+1}$

18) $\dfrac{x^3-8x^2-4x+8}{x^4-5x^2+4}$

19) $\dfrac{x^3-3x}{1-x^2}$

20) $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$

21) $\dfrac{x^3-x^2+1}{(x-1)^4}$

22) $\dfrac{\ln x}{x^2}$

b) Calcula as seguintes integrais definidas:

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x}dx$

2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$

3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{8+x^3}dx$

4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$

5) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+x+1)dx$

6) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx$

7) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x dx$

8) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x dx$

9) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}dx$

10) $\displaystyle\int_3^5 \frac{x}{x-1}dx$

11) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} x dx$

c) Calcula as seguintes integrais en intervalos non acotados:

1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4}$

2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x dx$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x+e^x}dx$

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx$

d) Calcula as seguintes integrais de funcións non acotadas:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $\displaystyle\int_0^1 x \ln x dx$

3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x+3} dx$

4) $\displaystyle\int_0^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

e) Calcula as seguintes integrais dobres:

1) Sexa $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \le xy \le 2, 1 \le x \le 3\}$

$$f(x,y) = \int\int_A \frac{e^{1/xy} dx dy}{y^2(x+1)^2} \tag{1}$$

2) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^y (x^2+y^2)dx\right] dy$

3) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy\right] dx$. Éste é o volume do elipsoide de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$ con $a=b=c=1$.

4) $\displaystyle\int_0^4 \left[\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{y-4}{2}} (y+2x+20)dx\right] dy$

4. **Series numéricas**

a) Calcula as seguintes series e produtos numéricos infinitos:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^{n+1}} = -7/18$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \tan^2 \frac{1}{2^n} \tan \frac{a}{2^{n-1}}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ln \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+1)}\right]$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ln \left(1+\tan^2 \frac{1}{2^n}\right)$

7) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left[1-\frac{2}{n^4}\right]$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(2n-1)(n+1)n^2}$

9) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left[1+\frac{1}{n^2+1}\right]$

10) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty} \left[1+\frac{2n+1}{(n^2-1)(n+1)^2}\right] = 4/3$

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ln \left(1+\tan^2 \frac{a}{2^n}\right)$

5. **Series de potencias**

   a) Calcula as expansións en serie de Taylor das seguintes funcións nos puntos e da orde que se indican (se non se indica nada, $x = 0, n = 5$):

      1) $f(x) = \sin(\tan x) - \tan(\sin x), x = 0, n = 25$
      2) $f(x) = x^3 - 1 - 4x^2 + 5x, x = 1, n = 10$
      3) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$
      4) $f(x) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
      5) $f(x) = \dfrac{1 - x\cos x}{1 - 2x\cos x + x^2}$
      6) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}$
      7) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{1-x^2} - 1\right)$

   b) Calcula as expansións en serie de potencias das seguintes funcións nos puntos e da orde que se indican:

      1) $f(x) = \dfrac{1}{x(1+\sqrt{x})}, x = 0, n = 25$
      2) $f(x,y) = \dfrac{1-y^2}{1-2xy+y^2}, x = 0, y = 0, n = 8$
      3) $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ sen indica-la orde
      4) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)(x-1)}$
      5) $f(x) = \operatorname{arg\,senh} x$
      6) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+x^2+x+1}$

Semana 5

Traballo a desenvolver pol@ alumn@

1. **Representación gráfica**

   a) Representa as superficies $z = x^2 - y^2$ e $z = -(x^2 - y^2)$

   b) Representa a superficie $z = \cos xy$ en $x, y \in [-3, 3]$

   c) Representa a curva paramétrica 3D $x(t) = t\cos 2\pi t, y(t) = t \operatorname{sen} 2\pi t, z(t) = 2 + t$

   d) Representa a superficie catenoide, cuxa ecuación implícita é $\cosh z = \sqrt{x^2 + y^2}$

   e) Representa a curva animada $x^3 + y^3 - 5xy = 1 - \dfrac{t}{4}, t = 0, \ldots, 10$

   SOLUCIÓN:

```
with(plots):
for t from 0 to 100 do P[t]:=implicitplot(x^3+y^3-5*x*y = 1 - t/4,x=-5..5,y=-5..5); od:
display([seq(P[t],t=0..100)], insequence=true);
```

   f) Representa a función $f(x) = x!$ e a súa derivada en $[-4, 4]$

   g) Representa a superficie 3D parametrizada por $x(u,v) = \cos u \operatorname{sen} 2v$, $y(u,v) = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} 2v$, $z(u,v) = \operatorname{sen} u$, $u, v \in [0, 2\pi]$

h) Representa a superficie 3D parametrizada por:

$$x = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} + \frac{uv^2}{2} \tag{2}$$
$$y = -\frac{v}{2} + \frac{v^3}{6} - \frac{vu^2}{2} \tag{3}$$
$$z = \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} \tag{4}$$

i) Representa a superficie 3D parametrizada por $x = u^2 + uv, y = u + v, z = u^3 + 3u^2v$.

j) Representa a función $f(x) = \int_{t=-\infty}^{x} e^{-t^4} dt$ no intervalo $[-2, 2]$

k) Representa a animación das curvas de Lissaojus, dadas por $x = \operatorname{sen} mt, y = \cos nt$, para $t \in [0, 2\pi]$ sendo m os 7 primeiros números de Fibonacci ($f_i = 1, i = 1, 2,\ f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$; usa-la función `fibonacci(...)` de Maple), e $n = m + 1$.
SOLUCIÓN: (NOTA: teclear MAYÚSCULAS+RETURN entre as liñas 2 e 3)

```
with(plots):with(combinat,fibonacci):
for k from 1 to 7 do m := fibonacci(k): n := fibonacci(k+1):
P[k]:=plot([sin(m*t),cos(n*t), t=0..2*Pi]); od:
display([seq(P[k],k=1..7)], insequence=true);
```

l) Representa a lemniscata de Bernouilli, definida polas seguintes ecuacións cartesiana, polar e paramétrica:

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2) \tag{5}$$
$$r^2 = \cos 2\theta \tag{6}$$
$$x = \frac{\cos t}{1 + \operatorname{sen}^2 t}, y = \frac{\cos t \operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen}^2 t} \qquad t \in [-\pi, \pi] \tag{7}$$

m) Representa a función $z = f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, x, y \in [-1, 1]$

n) Define a función $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{8} \frac{(-1)^{n+1}}{n} 2 \sin nt$. Represéntaa gráficamente e calcula $f(\pi/10)$

ñ) Representa gráficamente as curvas:

1) $x = \dfrac{t}{t^2 - 1}, y = \dfrac{t^2}{t^2 - 1}$
2) $x = e^{t-1} - t, y = t^3 - 3t$
3) $t^2 \log t, y = t(\log t)^2$

o) Representa gráficamente as curvas:

1) $x^3 + y^3 = 3xy$
2) $y^2(1 - x) = x^2(x + 3)$
3) $(x + y)^3(x - y) - 3xy + x = 0$
4) $x^7 + xy^4 - x^2y - y^2 = 0$

p) Representa gráficamente a superficie dada por $4(y - x^2)(xz - y^2) - (xy - z)^2 = 0$.

q) A ecuación de Schroedinger unidimensional, que na mecánica cuántica danos a función de onda $\Psi(x, t)$ dunha partícula sometida a un potencial $V(x)$, está dada por:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{8}$$

(nesta ecuación eliminamos constantes que non afectan á forma da función solución). Se $V(x) = 0, |x| < 1$ e $V(x) = \infty, |x| > 1$ (pozo de potencial), a parte real da función de onda $\Psi(x, t)$ da partícula é a seguinte:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} \cos kx \cos \omega t & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

Representa gráficamente esta función para $k = 8, \omega = 5$ con $t = 0, \ldots, 10$, e 100 fotogramas.

r) Representa gráficamente o lugar xeométrico dos puntos dados pola ecuación $z = f(x,y,t) = \exp(-x^2 - y^2) \operatorname{sen} tx^2 y$.

2. **Resolución de ecuacións e sistemas de ecuacións**

a) Resolve simbólica e numéricamente as seguintes ecuacións e sistemas de ecuacións:

1) $a + \ln(x-3) - \ln x = 0$ (en función de a)
2) $\sqrt{x-8} + \sqrt{x} = 2$ (non ten solucións)
3) $x^3 - 5ax^2 + x - 1 = 0$ (en función de a)
4) $48x^5 + 8x^4 - 6x^3 + 114x^2 - 37x + 18 = 0$
5) $x^2 + y^2 = 5, xy = y^2 - 2$
6) $f(n+2) = xf(n+1) + yf(n), f(0) = 1, f(1) = 1$
7) $f(n+1) = \frac{8}{5}f(n) - f(n-1), f(0) = 0, f(1) = 1$
8) $f(n+1) = 3nf(n) - 2n(n-1)f(n-1), f(1) = 5, f(2) = 54$
9) Sistema de ecs:

$$z^2 - x^2 - y^2 + 2ax + 2az - a^2 = 0 \tag{9}$$
$$yz - ay - ax + a^2 = 0 \tag{10}$$
$$-2a + x + y = 0 \tag{11}$$

10) Calcula-los coeficientes enteiros p, q, r, s, t, u, v que axustan a ecuación química $pKMnO_4 + qH_2SO_4 + rH_2C_2O_4 \rightarrow sK_2SO_4 + tMnSO_4 + uH_2O + vCO_2$
11) $x^3 - (a-1)x^2 + a^2x - a^3 = 0$. Logo, calcula as solucións para $a = 0, 1, 2$

b) Calcula $y = f(x)$ e representa gráficamente as seguintes curvas:

1) $x^2y(y-x) + x^3 - 2y^2 = 0$
2) $(y-1)^3 - 4x^2(y+1) = 0$

c) Dado o sistema $x + y + z = 0, x - y - 2xz = 0$, calcula $x(z), y(z)$.

d) Dado o sistema $x^2 + y^2 + z^2 = 20, x - xy + z - 4 = 0$, calcula $y(x), z(x)$.

3. **Manipulación de polinomios e funcións racionais**

a) Comproba se as seguintes expresións son polinomios.

1) $(x+3)(5x^4 - 3x^2)$
2) $(x-2)(x+4)(7x+1)(3x-2)$
3) $(e^{3x} - 7)(x+1)$
4) $(5x - 6x^4 - 3x + 2)(4x^4 - 5x^2)$
5) $\cos(3x - 7\pi)(3x^2 - 4)$

Para os que sexan polinomios, calcula:

1) O grao do polinomio
2) O coeficiente do termo de maior grao
3) Obter o polinomio en forma canónica.
4) Evaluar as expresións nos puntos x=0

b) Asigna a variabel x o valor 1. Define o polinomio $(x-1)(x^3-4)$. Que aconteceu?

c) Divide o polinomio $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ entre o polinomio $(x-2)$ dando o cociente e o resto. Multiplica o cociente polo polinomio $(x-3)(x-2)(x-1)$, dando o resultado en forma expandida. Calcula os graos de tódolos polinomios.

d) Calcula $(1-3x+x^3)^3$. De qué orde é o polinomio resultante?.

e) Dada a seguinte expresión racional $\dfrac{x^4+x^3-4x^2-4x}{x^4+x^3-x^2-x}$, calcula:

1) O cociente e o resto da división.
2) Escribe o polinomio do numerador e denominador como producto de factores irreducibles. Calcular o máximo común múltiplo e o mínimo común divisor do numerador e o denominador.
3) Transforma a expresión en $\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{(x-1)(x+1)^2}$
4) Transforma a expresión en $\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x+1)}$
5) Transforma a expresión en $\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

f) Dado o polinomio $(x^2+xy+x+y)(x+y)$, transfórmao en:

1) $x^3+2x^2y+xy^2+x^2+2xy+y^2$
2) $(x+1)(x+y)^2$
3) $y^2+(2y+y^2)x+(1+2y)x^2+x^3$
4) $x^3+x^2+(2x^2+2x)y+(x+1)y^2$

Exercicios avanzados

1. Calcula as seguintes lonxitudes de arcos, áreas e volumes de recintos:

a) A lonxitude dun arco de curva está dado por:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx \tag{12}$$

$$L=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt \tag{13}$$

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2}d\theta \tag{14}$$

$$L=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dx \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

Segundo sexa unha curva 2D en ecuación cartesiana, paramétrica $(x(t), y(t)$, polar $(\rho=\rho(\theta))$ ou paramétrica en 3D $(x(t), y(t), z(t))$. Calcula-la lonxitude do arco da curva $y^2=2px$ con $x\in[0,b]$

b) Calcula a lonxitude de arco da catenaria $y=a\cosh\dfrac{x}{a}$ con $x\in[0,b]$

c) Calcula a lonxitude de arco da curva $x=r(\cos t+t\operatorname{sen} t), y=r(\operatorname{sen} t-t\cos t)$ con $t\in[0,\pi]$

d) Calcula a lonxitude de arco da curva $\rho=a(\theta^2-1)/2$ con $\theta\in[0,\beta]$

e) Calcula a lonxitude de arco da curva 3D $x=3t, y=2\sqrt{2}t^{3/2}, z=3t^2/2$ con $t\in[0,b]$

f) Área entre $f(x)=\cosh x$ e $g(x)=\operatorname{senh} x$ con $x\geq 0$

g) Área entre as gráficas de $f(x)=x(x-1)$ e $g(x)=x/2$ con $x\in[0,2]$

h) Volume do sólido xerado ao rotar aredor do eixo OX o recinto limitado polas curvas $x=1$, $y=0$ e $y=1/\sqrt{1+x^2}$. Nota: este volume está dado por:

$$\pi\int_a^b f(x)^2dx \tag{17}$$

i) Volume do sólido limitado polas superficies $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $z = x$

2. Os polinomios de Tchevyshev $T_n(x)$ verifican que:

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n T_n(x) t^n \tag{18}$$

Con $\epsilon_0 = 1$ e $\epsilon_n = 2, n \geq 1$. Polo tanto, expandindo a función esquerda en serie en $t = 0$ podemos calcula-los polinomios $T_n(x)$. Calcula $T_2(x)$ e $T_{10}(x)$, e comproba a resposta cos comandos (que nos dan ambos polinomios):

```
with(orthopoly);2*T(2,x);2*T(10,x)
```

3. Dada a serie de potencias $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{logn}{n} x^n$, calcula as series de potencias truncadas de orde 5 correspondentes ás series inversa, exponencial, logaritmo, derivada e integral.

4. Dadas as Funcións Integrais de Fresnel de coseno e seno:

$$F_c(t) = \int_0^t \cos \frac{\pi u^2}{2} du \qquad F_s(t) = \int_0^t \operatorname{sen} \frac{\pi u^2}{2} du \tag{19}$$

Representa a curva paramétrica en $\mathbb{R}^2$ dada por $(F_c(t), F_s(t), t = 0, \ldots, 100)$